

文章编号: 1000-8055(2002) 04-0447-04

平面接触圆运动摩擦力的解析与数值算法

单颖春, 朱梓根
(北京航空航天大学 动力系, 北京 100083)

摘要: 本文给出了接触相对运动为圆时求解摩擦力的理论方法, 得到了摩擦力的解析解, 分析了二维接触圆运动所产生摩擦力的特征, 并将其与采用时域轨迹跟踪方法所得的数值解进行了比较, 验证了数值方法的可行性, 同时分析了数值方法产生误差的大小及来源, 为该数值方法的应用及推广于其他平面复杂接触运动提供了依据。

关键词: 摩擦力; 接触圆运动; 误差分析
中图分类号: V 231. 9 **文献标识码:** A

Theoretical and Numerical Methods for Solving Friction Force of Circular Motion in Contact Plane

SHAN Ying-chun, ZHU Zi-gen
(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: In this paper, a theoretical method is proposed to calculate friction force when friction interfaces are constrained to circular motion in a plane. Using this method we can, get the solution of friction force in theory and analyze its features. The comparison of the analytical solution with the numerical one shows that the numerical method is valid. Additionally, the source of errors is analysed in order to provide basis for further application of this method to calculating the friction force when friction interfaces are constrained to complex two-dimensional motions.

Key words: friction force; circular motion in contact plane; error analysis

1 引言

航空发动机中叶片与轮盘之间的榫接、叶片间的阻尼围带、阻尼凸肩、缘板阻尼块等结构均是利用结合面之间的干摩擦对结构进行减振。求解动接触问题中物体的响应特性必须确定接触面的动接触力。由于接触边界条件在求解之前是未知的, 并随响应求解结果的变化而变化, 使得接触位移与接触力之间表现为复杂的强非线性关系。只考虑一维接触运动时, 根据接触面的参数(正压力、接触刚度、摩擦系数等)则可以给出摩擦力与接触位移的非线性分段方程, 如不考虑接触刚度

的 Sgn 模型^[1, 2]和考虑接触刚度的双折线迟滞回线模型^[3, 4];但是在许多情况下, 物体间的相对运动无法用一维运动描述清楚, 如叶片发生弯扭耦合振动时, 接触面间的相对运动是二维甚至三维的, 若采用一维接触运动模型求解的摩擦力进行叶片非线性响应计算将会导致较大的误差, 因此有必要研究二维的接触运动。对于一般的二维接触运动, 摩擦力与接触位移之间的非线性关系难以用某种数学关系表示, 绝大多数情况必须通过数值解获得, 参考文献[5]提出了分析二维运动的时域轨迹跟踪方法, 但未考察其误差特性。因为只有二维运动中的特殊情况圆运动可以通过理论分

析获得解析解, 故本文给出接触圆运动中摩擦力的解析解及数值解, 以验证数值方法的有效性, 并对其采用不同参数时所产生的误差进行了计算。

2 接触圆运动摩擦力的数值解

应用数值方法求解二维接触运动摩擦力的模型见图1, 1及2点为两接触物体上的对应触点, 接触点间存在如图1所示的接触元件。接触刚度为 k_d , 触点间可提供的最大摩擦力等于 μN , 最大弹性变形距离为 $\mu N/k_d$ 。设滑动触点位于2点所在接触面上, 并以触点2的总体振动位移为动态坐标系的原点, 当接触点对1及2点之间存在相对位移时, 滑动触点可能保持粘滞状态或发生滑移, 用 b 点的运动描述滑动触点相对于局部坐标原点(2点)的滑动位移。若滑动触点保持粘滞状态, 2点和 b 点相互重合, 否则2点与 b 点将发生分离。 a 点和1点是固结在一起的两个点, 即在接触过程中始终不发生滑动。只是用1点的运动描述接触点在振动物体总体坐标系的位移, a 点的运动描述考虑摩擦前1及2点之间给定的相对运动——圆运动。

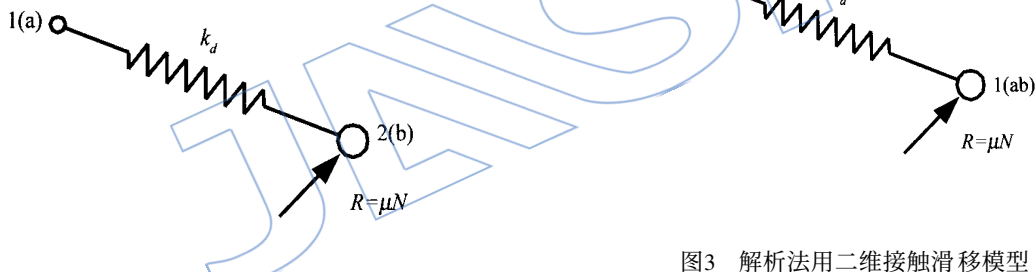


图1 数值法用二维接触滑移模型

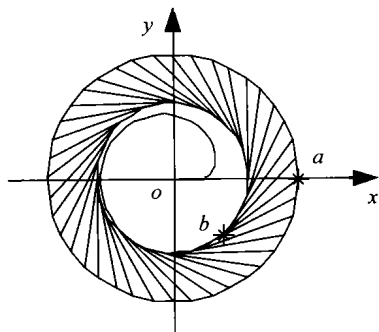


图2 全滑圆运动时滑动触点的跟踪结果

摩擦力的大小与方向取决于 a 和 b 点之间的相对位移。 a 点运动是已知的圆运动, 只要求得 b 点的运动即可获得摩擦力。采用数值跟踪方法^[5]求解 b 点的运动轨迹, 当 $\mu N/k_d$ 大于圆运动的半径时, b 点与2点始终保持粘滞状态。当 $\mu N/k_d$ 小

于圆运动半径时, 跟踪结果如图2。图2中的内圆为给定相对运动半径等于4 mm, $\mu N/k_d$ 等于3 mm时 b 点的轨迹, 内外圆之间的连线表示接触点间的相对位移。由图2可知, b 点始终处于滑动状态, 接触点间的距离恒等于临界距离 $\mu N/k_d$, 即摩擦力的大小恒等于 μN , 摩擦力方向与 a 点相对于 b 点的运动方向相反, 即沿着 a 和 b 点的连线由 a 点指向 b 点, 始终与 a 点运动相差一个固定的角度。对该数值解法的验证主要就是检查该角度的计算结果。因为该角度影响摩擦力分量(等效弹性和阻尼力)的大小, 直接影响接触物体的动态响应。

3 接触圆运动摩擦力的解析解

当考虑摩擦效应前的给定接触相对运动为圆时, 接触点间只有全固定和全滑动两种情形, 由于接触点全固定时摩擦力可以直接由给定的相对圆运动计算获得, 故在此只分析接触点发生全滑动时摩擦力的求解。采用如图3所示的模型, 与图1

图3 解析法用二维接触滑移模型

模型类似, 模型中1及2点的运动仍为接触点在振动物体总体坐标系下的位移, 以2点的振动位移作为动态坐标系的原点, a 点运动描述考虑摩擦前1和2点之间的相对运动——圆运动。与图1模型不同的是设滑动触点位于1点所在的接触面上, 用 b 点描述滑动触点滑移后相对于动态坐标系原点(2点)的运动。这两种模型本质上是完全一致的, 但在图3模型中, 摩擦力方向与 b 点的位移方向相反, 由 b 点的位移可直接求得摩擦力, 为理论分析增加了已知条件; 而在图1模型中, 摩擦力由 a 及 b 点间的相对运动确定, 而相对运动在求解前是未知的, 不易于进行理论分析。故求解接触圆运动摩擦力解析解时采用图3所示的模型, 模型中接触点1和2间的相对运动用(1)式表示:

$$u_a = A [\cos(\omega + \theta_a) \quad \sin(\omega + \theta_a)] \quad (1)$$

接触点全滑动时, b 点运动始终与 a 点相差一个恒定的相位: $\beta = \theta - \theta_a$

$$u_b = B[\cos(\omega + \theta_b) \sin(\omega + \theta_b)] \quad (2)$$

只考虑接触点的弹性, 忽略质量产生的惯性影响, 由于 b 点处于全滑动状态, 任何时刻摩擦力的大小始终等于最大摩擦力, $|f| = \mu N$, 而摩擦力方向与 b 点位移方向相反:

$$f = -k_d u_b = -\mu N[\cos(\omega + \theta_b) \sin(\omega + \theta_b)] \quad (3)$$

则:

$$u_b = \frac{\mu N}{k_d}[\cos(\omega + \theta_b) \sin(\omega + \theta_b)] \quad (4)$$

此外, 摩擦力方向时刻与相对运动的速度方向相反, 即:

$$f = -\mu N \frac{\dot{u}_a - \dot{u}_b}{|\dot{u}_a - \dot{u}_b|} \quad (5)$$

其中:

$$\dot{u}_a - \dot{u}_b = \left[-A \sin(\omega + \theta_a) + \frac{\mu N}{k_d} \sin(\omega + \theta_b) \right. \\ \left. A \cos(\omega + \theta_a) - \frac{\mu N}{k_d} \cos(\omega + \theta_b) \right] \quad (6)$$

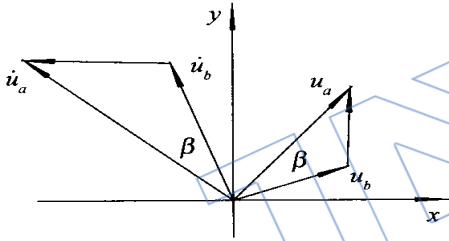


图4 二维接触运动的矢量图

根据图4的矢量关系:

$$|\dot{u}_a - \dot{u}_b|^2 = (A\omega)^2 + \left[\frac{\mu N}{k_d} \omega \right]^2 - 2A\omega^2 \frac{\mu N}{k_d} \cos(\beta) = \omega^2 d^2 \quad (7)$$

其中, d 为接触点之间的相对滑动位移:

$$d = \sqrt{A^2 + \left[\frac{\mu N}{k_d} \right]^2 - 2A \frac{\mu N}{k_d} \cos(\beta)} \quad (8)$$

根据公式(5)~(8), 摩擦力又可以表示成如下形式:

$$f = -\frac{\mu N}{d} \cdot \left[-A \sin(\omega + \theta_a) + \frac{\mu N}{k_d} \sin(\omega + \theta_b) \right. \\ \left. A \cos(\omega + \theta_a) - \frac{\mu N}{k_d} \cos(\omega + \theta_b) \right] \quad (9)$$

公式(3)和(9)的第一项或第二项对应相等, 将 $\theta_a = \theta_b + \beta$ 带入化简, 由第一项对应相等得下列

公式:

$$\cos(\omega + \theta_b) k_d d = -A k_d \cos(\beta) \sin(\omega + \theta_b) - A k_d \sin(\beta) \cos(\omega + \theta_b) + \mu N \sin(\omega + \theta_b)$$

$$\text{则:} \quad \sin(\beta) = -(d/A) \quad (10)$$

$$\cos(\beta) = \mu N / A k_d \quad (11)$$

将公式(11)带入公式(8)中, 得到两接触点得相对滑动距离为:

$$d = \sqrt{A^2 - \left[\frac{\mu N}{k_d} \right]^2} = \sqrt{A^2 - B^2} \quad (12)$$

故接触点的相对滑动位移与 b 点位移相互垂直。由公式(10)和(12)可知:

$$\sin(\beta) = -\frac{1}{1 - (\mu N / k_d A)} \quad (13)$$

产生全滑动状态的条件为 $\mu N / k_d \leq A$, 因此公式(13)始终有意义。接触点 b 的运动始终比 a 的运动落后 β 角, 而摩擦力的方向始终与接触点 b 的位移方向相反, 因此摩擦力与考虑摩擦前给定的相对圆运动(a 点运动)之间的夹角为 $\alpha = \pi + \beta$, 摩擦力的等效阻尼力分量 $f_c = -|f| \sin(\alpha)$, 等效弹性力分量 $f_k = -|f| \cos(\alpha)$ 。当 $\beta = 0$ 时, 对应着全粘滞状态和即将滑动的状态, $\alpha = \pi$, $f_c = 0$, 此时摩擦力只表现为弹性力; 当 $-90^\circ \leq \beta < 0$ 时, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$; 接触点处于全滑动状态, 摩擦力同时具有刚度特性和阻尼特性; 当 $\beta = -90^\circ$ 时, $\alpha = 90^\circ$; 此时摩擦力只表现为阻尼力, 但此时对应接触面的正压力等于零, 由公式(3)可知此时摩擦力已等于0, 这说明只要接触面上存在摩擦力, 就不可能单纯的只具有阻尼效果, 这只是摩擦力的一种极限状态。因此对于圆运动, 摩擦力与给定相对位移之间存在一个最优的 α 角, 使得摩擦力中的阻尼力分量最大, 产生最佳的阻尼减振效果。

4 结果对比及误差分析

以二维圆运动半径等于4 mm 时为例, 计算临界距离分别为1 mm, 2 mm, 3 mm 时 α 角的精确解和用时域跟踪方法所得的数值解, 用数值方法进行求解时, 取不同的时间间隔进行计算, 计算结果及误差见表1。其中 Δt 为时间间隔, T 为运动周期。

由表1结果可知, 数值解结果始终大于解析解, 当采用数值方法并保证选取的时间间隔足够小时, 如 $\Delta t = T/360$, 数值解与理论解相比已达到很小的误差, 继续缩小时间间隔, 数值解与理论解

表1 α 角的理论解与数值解对照表

临界距离 l/mm	精确解 $l(^{\circ})$	数值解			
		$\Delta t = T/20$	$\Delta t = T/90$	$\Delta t = T/180$	$\Delta t = T/360$
1	104.48	113.33 (8.44%)	106.47 (1.9%)	105.48 (0.96%)	104.98 (0.48%)
2	120	128.59 (7.16%)	121.98 (1.65%)	121 (0.83%)	120.5 (0.42%)
3	138.9	146.80 (5.69%)	140.55 (1.19%)	139.58 (0.49%)	139.1 (0.14%)

之间的误差将继续减小。数值解与理论解之间的误差产生原因见图5。

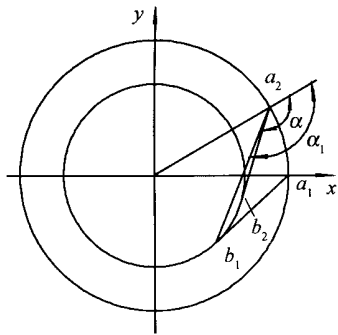


图5 数值方法的误差来源

如图5所示, a_1 和 a_2 为圆运动轨迹上间隔为 Δt 的两点, b_1 及 b_2 为与 a_1 及 a_2 相对应的滑动触点 b 的理论位置。采用数值方法求解, 当 a_1 点调整到 a_2 点时, 设由已知的 b_1 点的精确解计算 b_2 点, 由于 b_2 点的切线方向未知, 用 a_2 与 b_1 的连线方向代替 b_2 点的切线方向, 所求 b 点位移将位于 a_2 点与 b_1 点的连线上, 并与 a_2 之间保持临界距离, 故所得 α 角大于理论解 α 角, 只有当时间间隔无穷小时, 数值解才无限接近于精确解。对于复杂的二维接触运动, 如椭圆运动以及更一般的二维平面运动, 难以通过理论分析获得摩擦力的解析解, 而采用数值解法求解摩擦力, 只要适当减少跟踪过程的时间间隔, 就可以获得较高的精度。

5 结 论

本文通过理论分析给出了二维接触圆运动中

摩擦力与考虑摩擦效应前给定的相对圆运动(a 点运动)之间夹角的计算公式, 该角度直接关系到摩擦力中等效弹性和等效阻尼力所占的比例。与采用时域跟踪方法所得的数值解进行比较发现, 该角度的数值解总是大于理论解, 这是由于采用数值方法对滑动触点的轨迹进行跟踪时以割线代替切线而引入了误差, 但只要适当减少时间间隔, 数值方法可以达到较高的精度, 一般取 $\Delta t = T/90$ 即每隔4 选择一个计算点, 则可使误差小于2%。上述分析为数值方法的应用提供了依据。

参考文献:

[1] Den Hartog J P. Forced Vibration with Combined Coulomb and Viscous Friction[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1931, 53: 107- 115.

[2] Den Hartog J P. Mechanical Vibrations[M]. 4th ed., McGraw-Hill: New York, 1956.

[3] Griffin. Friction Damping of Resonant Stresses in Gas Turbine Engine Airfoils[J]. Journal of Engineering for Power, 1980, 102: 329- 333.

[4] Cameron T M, Griffin J H, Kiel R E, Hoosac T M. An Integrated Approach for Friction Damper Design[J]. ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Apr., 1990, 112: 175- 182.

[5] Sanliturk K Y, Ewins D J. Modelling Two Dimensional Friction Contact and its Application Using Harmonic Balance Method[J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, 193(2): 511- 523.

(责任编辑 王震华)